

MT-08

June - Examination 2016

B.A./B.Sc. Pt. III Examination**Complex Analysis****Paper - MT-08****Time : 3 Hours]****[Max. Marks :- 67****Note:** The question paper is divided into three sections A, B and C.**निर्देश :** यह प्रश्न पत्र 'अ' 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है।**Section - A****7 × 1 = 7**

(Very Short Answer Questions)

Note: Section 'A' contains **Seven** (07) Very Short Answer Type Questions. Examinees have to attempt all questions. Each question is of 01 marks. and maximum word limit may be thirty (30) words.**खण्ड - 'अ'**

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'ए' में **सात** (07) अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न के 01 अंक हैं और अधिकतम शब्द सीमा तीस (30) शब्द हैं।

- 1) (i) Define conformal mapping.
अनुकोण प्रतिचित्रण को परिभाषित कीजिए।
- (ii) Define analytic function.
विश्लेषिक फलन को परिभाषित कीजिए।
- (iii) Define meromorphic function.
अनन्त की फलन को परिभाषित कीजिए।
- (iv) State Balzano-Weierstras theorem.
बॉलजानो-वाइस्ट्रास प्रमेय लिखिए।
- (v) State Abel's theorem.
आबेल प्रमेय का कथन कीजिए।
- (vi) Define Poles.
अनन्तक को परिभाषित कीजिए।
- (vii) Write Cauchy-Riemann equations in polar form.
कोशी रीमान समीकरण का ध्रुवीय रूप लिखिए।

Section - B

4 × 8 = 32

(Short Answer Questions)

Note: Section 'B' contain **Eight** Short Answer Type Questions. Examinees will have to answer any four (04) questions. Each question is of 08 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

(खण्ड - ब)

(लघुत्तरात्मक प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'बी' में आठ लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं भी चार (04) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 08 अंक का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

2) Prove that a stereographic projection projects circles into circles or straight lines.

सिद्ध कीजिए की एक त्रिविम प्रक्षेप, वृत्तों को वृत्तों में या सरल रेखाओं में प्रक्षेप करता है।

3) Evaluate :

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin^6 z}{\left(z - \frac{\pi}{6}\right)^3} dz$$

मान ज्ञात कीजिए:

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin^6 z}{\left(z - \frac{\pi}{6}\right)^3} dz$$

4) Prove that the function

$$u = e^x (x \cos y - y \sin y)$$

satisfies Laplace's equation and find the corresponding analytic function $f(z) = u + iv$.

सिद्ध कीजिए कि फलन $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$ लाप्लास समीकरण को सन्तुष्ट करता है तथा इसके संगत विश्लेषिक फलन $f(z) = u + iv$ ज्ञात कीजिए।

5) Find radius of convergence for the following power series:

$$(i) \sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n \quad (ii) \sum \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} z^n$$

निम्न घात श्रेणियों की अभिसरण त्रिज्याएँ ज्ञात कीजिए:

$$(i) \sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n \quad (ii) \sum \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} z^n$$

6) State and prove fundamental theorem of integral calculus.
समाकलन के मूल प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।

7) Obtain expansion for

$$\frac{z^2 - 4}{(z + 1)(z + 4)}$$

which are valid, for the regions:

$$(i) 1 < |z| < 4 \quad \text{and} \quad (ii) |z| > 4$$

फलन $\frac{z^2 - 4}{(z + 1)(z + 4)}$ का प्रसार करो जो कि निम्न क्षेत्र के लिए वैध हो:

$$(i) 1 < |z| < 4 \quad \text{और} \quad (ii) |z| > 4$$

8) State and prove Liouville's theorem for entire function.
ल्यूवेल प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।

9) Evaluate: $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} \text{ मान ज्ञात कीजिए।}$$

Section - C

2 × 14 = 28

(Long Answer Questions)

Note: Section 'C' contain **Four** (04) Long Answer Type Questions. Examinees will have to answer any **Two** (02) questions. Each question is of 14 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 500 words. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

(खण्ड - स)

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'सी' में **चार** (04) निबन्धात्मक प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को किन्हीं भी **दो** (02) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का हैं, परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने है। इस प्रश्नपत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति हैं।

10) Show that the function

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2} & ; z \neq 0 \\ 0 & ; z = 0 \end{cases}$$

is not analytic at $z = 0$, although Cauchy-Riemann equations are satisfied at the point.

दर्शाइए कि फलन

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2} & ; z \neq 0 \\ 0 & ; z = 0 \end{cases}$$

$z = 0$ पर विश्लेषिक नहीं है, यद्यपि इस बिन्दु पर कोशी-रीमान समीकरण सन्तुष्ट होती है।

- 11) (i) Find the bilinear transformation which transforms points $z = -1, i, 1$ into the points $w = \infty, 1, 0$.

वह द्विरैखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $z = -1, i, 1$ को $w = \infty, 1, 0$ में प्रतिचित्रित करें।

- (ii) Describe the transformation $w = \log z$.

रूपान्तरण $w = \log z$ की विवेचना कीजिए।

- 12) (i) State and prove Cauchy's integral formula.

कोशी समाकलन सूत्र का कथन कर सिद्ध कीजिए।

- (ii) Describe nature of singularities of function

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$$

फलन $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$ कि विचित्रताओं की प्रकृती की विवेचना कीजिए।

- 13) Prove by contour integration:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

परिरेखा समाकलन द्वारा सिद्ध कीजिए:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$